Profesor
Aldo del Águila

ARITMÉTICA

GRUPO PITÁGORAS

ADICIÓN:

SUMAS NOTABLES:

1) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

Ejemplo:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 38 = \frac{38x39}{2} = 741$$

2) $\underbrace{2 + 4 + 6 + 8 + \ldots}_{\text{n sumandos}} = \boxed{n(n+1)}$

Ejemplo:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 38 = 19x20 = 380$$

$\frac{38}{2} = n$ ➡ $n = 19$

3) $\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots}_{\text{n sumandos}} = \boxed{n^2}$

Ejemplo:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 39 = 20^2 = 400$$

$\frac{39+1}{2} = n$ ➡ $n = 20$

4) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \boxed{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Ejemplo:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 19^2 = \frac{19x20x39}{6} = 2470$$

5) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \boxed{\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2}$

Ejemplo:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 19^3 = \left(\frac{19x20}{2}\right)^2 = 36100$$

SUMAS NOTABLES:

6) $1x2 + 2x3 + 3x4 + 4x5 + \ldots + n(n + 1) = \boxed{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

Ejemplo:

$1x2 + 2x3 + 3x4 + 4x5 + \ldots + 19x20 = \dfrac{19x20x21}{3} = 2660$

7) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^n = \boxed{\dfrac{a^{(n+1)}-1}{a-1}}$

Ejemplo:

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^9 = \dfrac{2^{10}-1}{2-1} = 1023$

ADICIÓN

Sucesión de segundo orden:

Ejemplo:

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5		
$c =$	$\boxed{10}$	$\boxed{13}$;	20;	31;	46;	65;…;	830	
$a + b =$	$\boxed{3}$	$\boxed{7}$	11	15	19			
$2.a =$	$\boxed{4}$	$\boxed{4}$	4	4				$r = 4$

Término de lugar "n" (t_n):

$$\boxed{t_n = an^2 + bn + c}$$

$2.a = 4$	$a + b = 3$	$c = 10$
$a = 2$	$2 + b = 3$	
	$b = 1$	

$\Rightarrow$ $t_n = 2n^2 + n + 10$

$n = 10$ $\Rightarrow$ $t_{10} = 2(10^2) + 10 + 10$ $\Rightarrow$ $t_{10} = 220$

Número de términos (N):

Ejemplo:

$t_n = 2n^2 + n + 10 = 830$ $\Rightarrow$ $2n^2 + n - 820 = 0$

$$\begin{array}{cc} 2n & 41 \\ n & -20 \end{array}$$

$2n + 41 = 0$ v $n - 20 = 0$

$n = -\frac{41}{2}$ ✗ v $n = 20$ ✓

Suma (S):

Ejemplo: $S = 13C_1^{20} + 7C_2^{20} + 4C_3^{20}$

$$S = (13)(20) + (7)\left(\frac{20x19}{2}\right) + 4\left(\frac{20x19x18}{2x3}\right)$$

$\Rightarrow$ $S = 6150$

ADICIÓN

Progresión geométrica:

Ejemplo:

3; 6; 12; 24; 48; ……; 12288

x2 x2 x2 x2

$k = 2$ $a_1 = 3$

Término de lugar "n" (a_n):

$$\boxed{a_n = a_1 . k^{n-1}}$$

a_1: primer término

k : razón

Ejemplos:

$n = 7$ ⇒ $a_7 = 3x2^6$ ⇒ $a_7 = 192$

$n = 9$ ⇒ $a_9 = 3x2^8$ ⇒ $a_9 = 768$

Número de términos (N):

Ejemplo:

$a_n = 3x2^{n-1} = 12288$

$2^{n-1} = 4096$

$2^{n-1} = 2^{12}$

⇒ $n = 13$

Suma (S):

$$\boxed{S = a_1 . \left(\frac{k^n - 1}{k - 1}\right)}$$

a_1: primer término

k : razón

Ejemplo:

$S = 3\left(\frac{2^{13} - 1}{2 - 1}\right)$ ⇒ $S = 24\,573$

SUSTRACCIÓN:

$$M - S = D$$

M: minuendo
S: sustraendo
D: diferencia

M, S y D $\in \mathbb{N}$ → $M + S + D = 2M$

Propiedad:

$a > c$

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \; - \\ \overline{cba} \\ \hline \overline{xyz} \end{array}$$

Entonces:

$$y = 9$$

$$x + z = 9$$

$$a - c = x + 1$$

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 731 \; - \\ 137 \\ \hline 594 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 854 \; - \\ 458 \\ \hline 396 \end{array}$$

$7 - 1 = 5 + 1$ $\qquad$ $8 - 4 = 3 + 1$

Propiedad:

$$\begin{array}{r} \overline{abc}_{(n)} \; - \\ \overline{cba}_{(n)} \\ \hline \overline{xyz}_{(n)} \end{array}$$

Entonces:

$$y = n - 1$$

$$x + z = n - 1$$

$$a - c = x + 1$$

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 731_{(9)} \; - \\ 137_{(9)} \\ \hline 583_{(9)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 452_{(8)} \; - \\ 254_{(8)} \\ \hline 176_{(8)} \end{array}$$

$7 - 1 = 5 + 1$ $\qquad$ $4 - 2 = 1 + 1$

Complemento Aritmético (CA):

Sea $N_{(b)}$ un número entero positivo de «k» cifras, entonces:

$$\boxed{CA(N_{(b)}) = 1\underbrace{000....000}_{k\ \text{ceros}}{}_{(b)} - N_{(b)}}$$

Ejemplos:

$CA(27) = 100 - 27 = 73$

$CA(526) = 1000 - 526 = 474$

$CA(4031) = 10000 - 4031 = 5969$

$CA(4031_{(7)}) = 10000_{(7)} - 4031_{(7)} = 2636_{(7)}$

Método práctico:

9 9 9 10

$CA(7084000) = 2916000$

9 9 9 9 10

$CA(5004200) = 4995800$

7 7 7 7 8

$CA(5004200_{(8)}) = 2773600_{(8)}$

6 6 6 7

$CA(4031_{(7)}) = 2636_{(7)}$

$CA(\overline{abcd}) = 10000 - \overline{abcd}$

CEPREUNI 2019-II

1) Si tenemos: 729 + 8019 + 80919 + 809919 + …… (100 sumandos).
Calcule el resultado y dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 373 B) 832 C) 891 D) 900 E) 908

$$E = \underbrace{729 + 8019 + 80919 + 809919 + \ldots}_{100\ \text{sumandos}}$$

$$E = 81\cdot 9 + 81\cdot 99 + 81\cdot 999 + 81\cdot 9999 + \ldots + 81\cdot \underbrace{999\ldots99}_{100\ \text{cifras}}$$

$$E = 81\,(9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{100\ \text{cifras}})$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 9 & \rightarrow & 10 - 1 \\ 99 & \rightarrow & 100 - 1 \\ 999 & \rightarrow & 1000 - 1 \\ 9999 & \rightarrow & 10000 - 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 9\ldots9999 & \rightarrow & 100\ldots000 - 1 \end{array}\right\} 100\ \text{sumandos}$$

$$\underbrace{9\ldots9999}_{100\ \text{cifras}} \qquad \underbrace{111\ldots1110}_{101\ \text{cifras}} - 100$$

LUEGO:

$$\begin{array}{r} \overbrace{111\ldots\ldots1110}^{101\ \text{cifras}} \; - \\ 100 \\ \hline \underbrace{111\ldots\ldots1010}_{101\ \text{cifras}} \end{array}$$

$$E = 81\cdot(\underbrace{1111\ldots\ldots11010}_{101\ \text{cifras}})$$

$$\begin{array}{r} \overbrace{111\ldots111010}^{101\ \text{cifras}} \; \times \\ 81 \\ \hline 111\ldots\ldots111010 \\ 8888\ldots\ldots88080 \\ \hline \underbrace{8999\ldots\ldots991810}_{102\ \text{cifras}} \end{array}$$

$$E = \underbrace{8999\ldots\ldots991810}_{102\ \text{cifras}}$$

PIDEN:

$$X = 8 + 1 + 8 + 1 + 9\cdot 97$$

$$\therefore X = 891$$

CEPREUNI 2019-II

2) Dar la suma de la siguiente adición

$S = 7 + 77 + 777 + \ldots\ldots$ ("n" sumandos)

A) $7[11^{n+1} - 11n + 1]$ B) $11[10^{n+1} - 7n + 49]$ C) $7\left[\frac{10^n - n - 9}{49}\right]$ D) $7\left[\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}\right]$ E) $11\left[\frac{7^{n+1} - 7n + 7}{11}\right]$

$$S = \overbrace{7 + 77 + 777 + 7777 + \ldots + \underbrace{777\ldots7}_{n \text{ cifras}}}^{n \text{ SUMANDOS}}$$

$$S = 7\cdot1 + 7\cdot11 + 7\cdot111 + 7\cdot1111 + \ldots + 7\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ cifras}}$$

$$S = 7(1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ cifras}})$$

$$S = \frac{7\cdot9}{9}(1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ cifras}})$$

$$S = \frac{7}{9}(9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{n \text{ cifras}})$$

$$\boxed{1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}}$$

$$S = \frac{7}{9}(10^1 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \ldots + 10^n - 1)$$

$$S = \frac{7}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \ldots + 10^n \underbrace{- 1 - 1 - 1 \ldots - 1}_{n \text{ VECES}})$$

$$S = \frac{7}{9}(\boxed{1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n} - n - 1)$$

$$S = \frac{7}{9}\left(\boxed{\frac{10^{n+1} - 1}{9}} - n - 1\right)$$

$$S = \frac{7}{9}\left(\frac{10^{n+1} - 1}{9} - \frac{n\cdot9}{9} - \frac{1\cdot9}{9}\right)$$

$$\therefore S = \frac{7(10^{n+1} - 9n - 10)}{81}$$

CEPREUNI 2019-II

3) Calcule la siguiente suma $2+22_{(7)}+222_{(7)}+\cdots+\underbrace{22\ldots22_{(7)}}_{50\text{ cifras}}$

A) $\frac{7^{50}-57}{6}$ B) $\frac{7^{51}-51}{6}$ C) $\frac{7^{51}-307}{18}$ D) $\frac{7^{52}-209}{18}$ E) $\frac{7^{52}-51}{18}$

PROPIEDAD MÁXIMO NUMERAL

EJEMPLOS:

$555_{(6)}=6^3-1$

$7777_{(8)}=8^4-1$

$$\boxed{1+a+a^2+a^3+\ldots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}}$$

$$E=2_{(7)}+22_{(7)}+222_{(7)}+\ldots+\underbrace{222\ldots2_{(7)}}_{50\text{ cifras}}$$

$$3E=3(2_{(7)}+22_{(7)}+222_{(7)}+\ldots+\underbrace{222\ldots2_{(7)}}_{50\text{ cifras}})$$

$$3E=6_{(7)}+66_{(7)}+666_{(7)}+\ldots+\underbrace{666\ldots6_{(7)}}_{50\text{ cifras}}$$

$$3E=7^1-1+7^2-1+7^3-1+\ldots+7^{50}-1$$

$$3E=7+7^2+7^3+7^4+\ldots+7^{50}\underbrace{-1-1-1\ldots\ldots-1}_{50\text{ veces}}$$

$$3E=\boxed{1+7+7^2+7^3+7^4+\ldots+7^{50}}-50-1$$

$$3E=\frac{7^{51}-1}{6}-51$$

$$3E=\frac{7^{51}-1}{6}\;\frac{-51\cdot6}{6}$$

$$3E=\frac{7^{51}-1-306}{6}$$

$$3E=\frac{7^{51}-307}{6}$$

$$E=\frac{7^{51}-307}{3\cdot6}$$

$$\therefore\ E=\frac{7^{51}-307}{18}$$

CEPREUNI 2019-II

4) La suma de trece números enteros consecutivos es de la forma $\overline{4a9a}$ .Calcule el mayor de los números.

A) 363 B) 368 C) 369 D) 374 E) 375

$$\overbrace{(N-6)+\dots+(N-2)+(N-1)+N+(N+1)+(N+2)+\dots+\boxed{(N+6)}}^{13\text{ NÚMEROS CONSECUTIVOS}}=\overline{4a9a}$$

$$13N=\overline{4a9a}$$
$$-1\,-4\,-3\;1$$

COMO $N\in\mathbb{Z}$ $\longrightarrow$ $\overset{\circ}{13}=\overline{4a9a}$

$$\overset{\circ}{13}=-4-4a-27+a$$

$$(-1)\,\overset{\circ}{13}=(-31-3a)(-1)$$

PROPIEDAD DIVISIBILIDAD $\quad\overset{\circ}{13}=31+3a$

POR TANTEO $\quad a=7\rightarrow\overset{\circ}{13}=52=31+3\times7$

REEMPLAZANDO $a=7$

$$13N=\overline{4a9a}$$
$$13N=4797$$
$$N=369$$

PIDEN:

$$N+6=369+6$$
$$\therefore\ N+6=375$$

CEPREUNI 2019-II

5) Si $CA(\overline{xy}) + CA(\overline{yx}) = 79$. Indique el valor que toma x + y.

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

DATO:

$$CA(\overline{xy}) + CA(\overline{yx}) = 79$$

$$100 - \overline{xy} + 100 - \overline{yx} = 79$$

$$200 - 79 = \overline{xy} + \overline{yx}$$

$$121 = x(10) + y + y(10) + x$$

$$121 = 11x + 11y$$

$$121 = 11(x+y)$$

$$\therefore 11 = x + y$$

CEPREUNI 2019-II

6) Sí $\overline{xyz} - \overline{zyx} = \overline{abc}$ y $\overline{abc} + \overline{cba} = \overline{nmpq}$.
La suma de cifras de (n + m + p + q) es:
A) 9 B) 12 C) 15D) 16 ~~E)~~ 18

DATO:

$$\begin{array}{r} \overline{xyz} \; - \\ \overline{zyx} \\ \hline \overline{abc} \end{array}$$

PROPIEDAD: i $b = 9$

ii $a + c = 9$

DATO:

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ \overline{\boxed{a}\,bc} \; + \\ \overline{\boxed{c}\,ba} \\ \hline 1089 = \overline{nmpq} \end{array}$$

$n = 1$ $m = 0$ $p = 8$ $q = 9$

PIDEN:

$\therefore n + m + p + q = 18$

CEPREUNI 2019-II

7) Si $\overline{xyz}_{(6)} - \overline{zyx}_{(6)} = \overline{pqr}_{(6)}$ y también: $\overline{pqr}_{(6)} + \overline{prq}_{(6)} + \overline{qpr}_{(6)} + \overline{qrp}_{(6)} + \overline{rpq}_{(6)} + \overline{rqp}_{(6)} = \overline{a55b}_{(6)}$. Calcule $(a + b) \times 2$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

EJEMPLO:

$$\begin{array}{r} 3\ 3\ 2\phantom{_{(6)}} \\ 5\ 4\ 3\ 1_{(6)} \\ 4\ 5\ 2\ 0_{(6)} \\ 3\ 5\ 4\ 1_{(6)} \\ +\ 5\ 2\ 3\ 2_{(6)} \\ \hline 3\ 2\ 0\ 0\ 4_{(6)} \end{array}$$

i $1+0+1+2 = 4 < 6$

ii $3+2+4+3 = 12 > 6$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 6 \\ \hline 12 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

iii $2+4+5+5+2 = 18 > 6$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 6 \\ \hline 18 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}$$

iv $3+5+4+3+5 = 20 > 6$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 6 \\ \hline 18 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$$

DATO:

$$\begin{array}{r} \overline{xyz}_{(6)} \\ -\ \overline{zyx}_{(6)} \\ \hline \overline{pqr}_{(6)} \end{array}$$

PROPIEDAD:

i $q = 5$

ii $p + r = 5$

$\longrightarrow r + p + q = 10$

$$\begin{array}{r} 3\ 3\ 3\phantom{_{(6)}} \\ \overline{pqr}_{(6)} \\ \overline{prq}_{(6)} \\ \overline{qpr}_{(6)} \\ \overline{qrp}_{(6)} \\ \overline{rpq}_{(6)} \\ +\ \overline{rqp}_{(6)} \\ \hline 3\ 5\ 5\ 2_{(6)} \end{array} = \overline{a55b}_{(6)}$$

i $2(r+p+q) = 20 > 6$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 6 \\ \hline 18 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$$

ii $2(p+r+q)+3 = 23 > 6$

$$\begin{array}{r|l} 23 & 6 \\ \hline 18 & 3 \\ \hline 5 & \end{array}$$

$a = 3$

$b = 2$

PIDEN:

$\therefore (a+b) \times 2 = 10$

CEPREUNI 2019-II

8) El complemento aritmético de un número de cuatro cifras es Igual a la suma de sus cifras, excepto la de las centenas. La suma de las cuatro cifras es

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

DATO: $CA(\underbrace{\overline{abcd}}_{4\text{ cifras}}) = \underbrace{a+c+d}_{1\text{ cifra o } 2\text{ cifras}}$

ENTONCES: $a=9$ y $b=9$

REEMPLAZANDO:

$CA(\overline{99cd}) = 9+c+d$

$10000 - \overline{99cd} = 9+c+d$

$10000 = \overline{99cd} + 9+c+d$

$10000 = 9\times10^3 + 9\times10^2 + c\cdot10 + d + 9+c+d$

$10000 = 9909 + 11c + 2d$

$91 = 11c + 2d$

POR TANTO $c=7$

$91 = 11c + 2d$

$91 = 11\cdot7 + 2d$

$91 - 77 = 2d$

$14 = 2d$

$7 = d$

PIDEN:

$\therefore a+b+c+d = 32$

EJEMPLOS:

$CA(\underbrace{\overset{9\,9\,9\,10}{9943}}_{4\text{ cifras}}) = \underbrace{57}_{2\text{ cifras}}$

$CA(\underbrace{\overset{9\,9\,9\,10}{9956}}_{4\text{ cifras}}) = \underbrace{44}_{2\text{ cifras}}$

$CA(\underbrace{\overline{xyzw}}_{4\text{ cifras}}) = \underbrace{\overline{mn}}_{2\text{ cifras}} \longrightarrow x=9 \wedge y=9$

CEPREUNI 2019-II

9) Si $\overline{abc}$ es igual a la suma del doble de su complemento aritmético más el CA de la suma de las cifras que no forman el número. Calcule a + b + c.

A) 23 B) 16 C) 15 D) 20 E) 11

$$\overline{abc} = 2\,CA(\overline{abc}) + CA(\overbrace{45-(a+b+c)}^{2\text{ cifras}})$$

$$\overline{abc} = 2\left[1000-\overline{abc}\right] + 100-\left[45-(a+b+c)\right]$$

$$\overline{abc} = 2000 - 2(\overline{abc}) + 100 - 45 + a+b+c$$

$$\overline{abc} + 2(\overline{abc}) = 2055 + a+b+c$$

$$3(\overline{abc}) = 2055 + a+b+c$$

$a=6 \longrightarrow$

$$3(\overline{6bc}) = 2055 + 6 + b + c$$

$$3(6\cdot10^2 + b\cdot10 + c) = 2061 + b + c$$

$$1800 + 30b + 3c = 2061 + b + c$$

$$30b - b + 3c - c = 2061 - 1800$$

$$29b + 2c = 261$$

Por tanteo

$$29\cdot9 + 2\cdot0 = 261$$

$$b=9 \quad c=0$$

Piden:

$$\therefore\ a+b+c=15$$

CEPREUNI 2019-II

10) Calcule el complemento aritmético de un número de 3 cifras, sabiendo que cuando se le suma 100, se obtiene el cuádruplo de su CA.

A) 220 B) 290 C) 520 D) 620 E) 780

$CA(\overline{abc}) = ?$

DATO: $\overline{abc} + 100 = 4 \cdot CA(\overline{abc})$

$\overline{abc} + 100 = 4(1000 - \overline{abc})$

$\overline{abc} + 100 = 4000 - 4(\overline{abc})$

$\overline{abc} + 4(\overline{abc}) = 4000 - 100$

$5(\overline{abc}) = 3900$

$\overline{abc} = 780$

PIDEN:

$CA(\overset{9\ 10}{780}) = 220$

$\therefore 220$